

数 学

学 科(コース)	配 点
化学・生命理工学科, 物理・材料理工学科, システム創成工学科(機械科学コース, 社会基盤・環境コース)	300 点
システム創成工学科(電気電子通信コース)	250 点
システム創成工学科(知能・メディア情報コース)	400 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は、**1** から **5** までの計 5 問です。**1** から **5** までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は、**1** から **5** までの計 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答用紙の表紙は、計算用紙として適宜利用してよい。
5. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
6. 各解答用紙は、紙面の中央に印刷された縦線によって、左側と右側の二つの部分に分けられています。解答は、まず用紙の左側の部分に書き、それから右側の部分に続けなさい。
7. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
8. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
9. 試験終了後、問題冊子、解答用紙の表紙は持ち帰りなさい。

1 以下の問いに答えよ。

(1) 2つのベクトル $\vec{a} = (1, t)$ と $\vec{b} = \left(1, \frac{t}{3}\right)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき、 t の値を求めよ。ただし、 $t > 0$ とする。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ のとき、関数 $y = -\cos 2x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 2$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

(3) $a_1 = 4$ 、 $a_{n+1} = 2a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項と、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(4) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \tan x}{\sqrt{\cos 2x} - \cos x} + \frac{x}{\tan 2x} \right)$$

2 定数 a が $0 < a < 1$ を満たすとき、以下の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int \log_a x \, dx$ を求めよ。

(2) 不定積分 $\int x^2 \log_a x \, dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 |x \log_a x| a^{|\log_a x|} dx$ を求めよ。

3 曲線 $C: y = axe^{-bx^2}$ について、定数 a, b が $a > 0, b > 0$ であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C を表す関数 y の極大値を求めよ。
- (2) 関数 y が座標 $x = \frac{1}{2}$ において極大値 $e^{-\frac{1}{2}}$ をとるとき、定数 a, b を求めよ。
- (3) 設問(2)で定めた曲線 C に接する直線の傾きが最大となるときの接線 l_1 の方程式を求めよ。
- (4) 設問(2)で定めた曲線 C について、 $x > 0$ に存在する変曲点 P を通り、 y 軸に平行な直線を l_2 とする。曲線 C と設問(3)で定めた直線 l_1 、および l_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 曲線 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 P, Q におけるそれぞれの接線 l_1, l_2 が交点 M で直交している。点 Q の x 座標は -1 である。また、円 C_2 は 3 点 P, Q, M を通る。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 つの接線 l_1, l_2 の方程式を求めよ。
- (2) 円 C_2 の方程式を求めよ。
- (3) 点 P を通る接線 l_1 と直線 $y = a$ 、および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 、点 Q を通る接線 l_2 と直線 $y = a$ 、および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき、次の極限値を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2}$$

- (4) 線分 PQ と曲線 C_1 で囲まれた図形を、 y 軸まわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

5 サイクロイド C が媒介変数 θ を用いて

$$C: \begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表される。直線 $x = \pi$ と C 、および x 軸で囲まれた図形を D とする。また、直線 $x = \pi$ 上および x 軸上にはない C 上の点を P 、点 P における C の接線を l とする。 l の傾きが -1 であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 D の面積を求めよ。
- (2) 点 P の座標を求めよ。
- (3) 直線 $x = \pi$ と x 軸との交点を Q 、 $x = \pi$ と C との交点を R とする。点 S は線分 QR 上にあり、線分 PS は D の面積を二等分する。このとき、 S の座標を求めよ。